

4.1 El problema de la recta tangente

■ **Introducción** En un curso de cálculo se estudian muchas cosas diferentes, pero como se mencionó en la introducción de la sección 3.1, el tema “cálculo” por lo regular se divide en dos amplias áreas —relacionadas entre sí— denominadas **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. El análisis de cada uno de estos temas suele comenzar con un problema de motivación que implica la gráfica de una función. El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema.

- Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función f ,

mientras el estudio del cálculo integral se motiva con el siguiente problema:

- Encontrar el área bajo la gráfica de una función f .

El primer problema se abordará en esta sección y el segundo se analizará en el libro *Matemáticas 2* de esta serie.

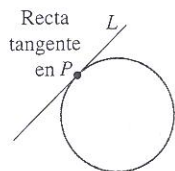


FIGURA 4.1.1 La recta tangente L toca un círculo en el punto P

■ **Recta tangente a una gráfica** La palabra *tangente*, surge del verbo latino *tangere*, que significa “tocar”. Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta L que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto P . Vea la FIGURA 4.1.1. No resulta tan fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función f . La idea de *tocar* trasladada del concepto de recta tangente a la gráfica de una función, pero la idea de *cortar la gráfica en un punto* no lo hace.

Suponga que $y = f(x)$ es una función continua. Si, como se muestra en la FIGURA 4.1.2, f posee una recta tangente L a su gráfica en un punto P , entonces ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta requerimos las coordenadas de P y la pendiente m_{\tan} de L . Las coordenadas de P no presentan ninguna dificultad, puesto que un punto sobre la gráfica de una función f se obtiene al especificar un valor de x en el dominio de f . Así, las coordenadas del punto de tangencia en $x = a$ son $(a, f(a))$. En consecuencia, el problema de encontrar una recta tangente se vuelve en el problema de encontrar la pendiente m_{\tan} de la recta. Como medio para *aproximar* m_{\tan} , es fácil encontrar las pendientes m_{\sec} de rectas secantes (del verbo latino *secare*, que significa “cortar”) que pasan por el punto P y cualquier otro punto Q sobre la gráfica. Vea la FIGURA 4.1.3.

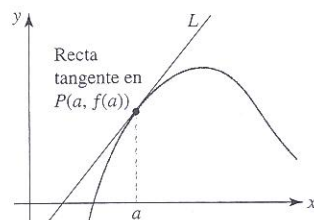


FIGURA 4.1.2 Recta tangente L a una gráfica en el punto P

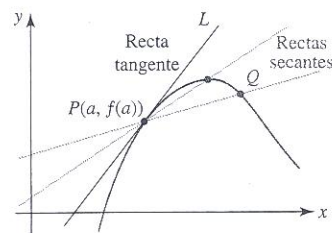


FIGURA 4.1.3 Pendientes de rectas secantes aproximan la pendiente m_{\tan} de L

■ **Pendiente de rectas secantes** Si las coordenadas de P son $(a, f(a))$ y las coordenadas de Q son $(a + h, f(a + h))$, entonces como se muestra en la FIGURA 4.1.4, la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{\sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

o bien,

$$m_{\sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (1)$$

La expresión en el miembro derecho de la igualdad en (1) se denomina **cociente diferencial**. Cuando se hace que h asuma valores que cada vez son más próximos a cero, es decir, cuando $h \rightarrow 0$, entonces los puntos $Q(a + h, f(a + h))$ se mueven en la curva cada vez más cerca del punto $P(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que las rectas secantes tiendan a la recta tangente L , y que $m_{\sec} \rightarrow m_{\tan}$ cuando $h \rightarrow 0$. Es decir,

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\sec}$$

en el supuesto de que el límite existe. Esta conclusión se resume en una forma equivalente del límite usando el cociente diferencial (1).

Definición 4.1.1 Recta tangente con pendiente

Sea $y = f(x)$ continua en el número a . Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente m_{\tan} .

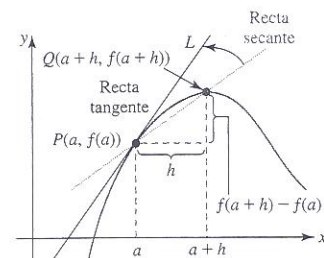


FIGURA 4.1.4 Rectas secantes giran en la recta tangente L cuando $h \rightarrow 0$

Justo como muchos de los problemas analizados antes en esta unidad, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Si el límite en (2) existe, el número m_{tan} también se denomina pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

El cálculo de (2) es esencialmente un *proceso de cuatro pasos*, tres de los cuales implican sólo precálculo matemático: álgebra y trigonometría. Si los tres primeros pasos se llevan a cabo con precisión, el cuarto, o paso de cálculo, *puede ser* la parte más sencilla del problema.

La pendiente de la recta tangente:

Directrices para calcular (2)

- Evaluar $f(a)$ y $f(a + h)$.
- Evaluar la diferencia $f(a + h) - f(a)$. Simplificar.
- Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Proceso de cuatro pasos

En muchas instancias, el cálculo de la diferencia $f(a + h) - f(a)$ en el paso ii) es el más importante. Resulta imperativo que usted simplifique este paso cuanto sea posible. Un consejo de cómo hacerlo: en *muchos* problemas que implican el cálculo de (2) es posible factorizar h de la diferencia $f(a + h) - f(a)$. ◀ Nota

EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a .

- El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1 + h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

- Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

- Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h. \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

- Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{\substack{\text{por el paso precedente} \\ \downarrow}}{f(1 + h) - f(1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $(1, 3)$ es 2.

Hay que notar que sólo se ha encontrado la pendiente de la recta tangente. Falta hallar la ecuación de esa recta

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

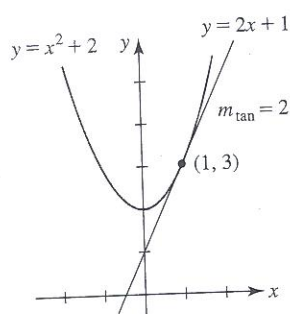


FIGURA 4.1.5 Recta tangente en el ejemplo 2

Solución Se conocen el punto de tangencia $(1, 3)$ y la pendiente $m_{\text{tan}} = 2$, de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones x y y de la recta mostrada en la FIGURA 4.1.5.

EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2/x$ en $x = 2$.

Solución Se empieza por usar (2) para encontrar m_{tan} con a identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

i) Se tiene $f(2) = 2/2 = 1$ y $f(2 + h) = 2/(2 + h)$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(2 + h) - f(2) &= \frac{2}{2 + h} - 1 \\ &= \frac{2}{2 + h} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + h}{2 + h} \leftarrow \text{un común denominador es } 2 + h \\ &= \frac{2 - 2 - h}{2 + h} \\ &= \frac{-h}{2 + h} \leftarrow \text{aquí está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado debe dividirse entre h o, más precisamente, entre $\frac{h}{1}$. Se invierte y multiplica por $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{-h}{2 + h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{2 + h} \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Por (2), m_{tan} es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2 + h} = -\frac{1}{2}.$$

Como $f(2) = 1$, el punto de tangencia es $(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $(2, 1)$ es $m_{\text{tan}} = -\frac{1}{2}$. Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de $y = 2/x$ y la recta tangente en $(2, 1)$ se muestran en la FIGURA 4.1.6.

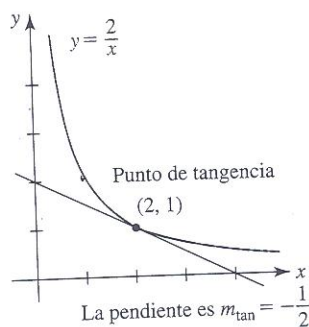


FIGURA 4.1.6 Recta tangente en el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $x = 5$.

Solución Al sustituir a por 5 en (2) se tiene:

i) $f(5) = \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2$, y

$$f(5 + h) = \sqrt{5 + h - 1} = \sqrt{4 + h}.$$

ii) La diferencia es

$$f(5 + h) - f(5) = \sqrt{4 + h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de h en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
 f(5+h) - f(5) &= \frac{\sqrt{4+h} - 2}{1} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \\
 &= \frac{(4+h) - 4}{\sqrt{4+h} + 2} \\
 &= \frac{h}{\sqrt{4+h} + 2} \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h
 \end{aligned}$$

iii) Así, el cociente diferencial $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ es:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \frac{\frac{h}{\sqrt{4+h} + 2}}{h} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.
 \end{aligned}$$

iv) El límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4+2}} = \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $(5, 2)$ es $\frac{1}{4}$.

El resultado obtenido en el siguiente ejemplo no es sorprendente.

EJEMPLO 5 Recta tangente a una recta

Para cualquier función lineal $y = mx + b$, la recta tangente a su gráfica coincide con la recta misma. Así, no de manera inesperada, la pendiente de la recta tangente para cualquier número $x = a$ es

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(a+h) + b - (ma + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m.$$

■ **Tangentes verticales** El límite en (2) puede no existir para una función f en $x = a$ y aun así ser una tangente en el punto $(a, f(a))$. La recta tangente a una gráfica puede ser **vertical**, en cuyo caso su pendiente está indefinida. El concepto de tangente vertical se abordará en la sección 4.2.

EJEMPLO 6 Recta tangente vertical

Aunque por esta ocasión no se abundará en los detalles, puede demostrarse que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. En la FIGURA 4.1.7 se observa que el eje y , es decir, la recta $x = 0$, es tangente a la gráfica en el punto $(0, 0)$.

■ **Una tangente que puede no existir** La gráfica de una función f que es continua en un número a no tiene por qué poseer una recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Una recta tangente no existirá cuando la gráfica de f tenga un pico pronunciado en $(a, f(a))$. En la FIGURA 4.1.8 se indica qué puede ser erróneo cuando la gráfica de la función tiene un "pico". En este caso f es continua en a , pero las rectas secantes que pasan por P y Q tienden a L_2 cuando $Q \rightarrow P$, y las rectas secantes que pasan por P y Q' tienden a una recta diferente L_1 cuando $Q' \rightarrow P$. En otras palabras, el límite en (2) no existe porque los límites laterales del cociente diferencial son diferentes (cuando $h \rightarrow 0^+$ y cuando $h \rightarrow 0^-$).

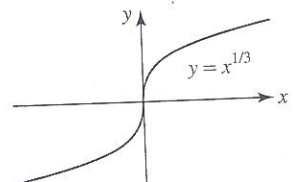


FIGURA 4.1.7 Tangente vertical en el ejemplo 6

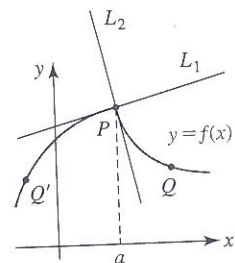


FIGURA 4.1.8 La tangente no existe en $(a, f(a))$

Atención
Atención

EJEMPLO 7 Gráfica con un pico

Demuestre que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en $(0, 0)$.

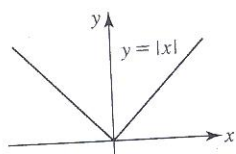


FIGURA 4.1.9 Función en el ejemplo 7

Solución La gráfica de la función valor absoluto en la FIGURA 4.1.9 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de f no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h, & h > 0 \\ -h, & h < 0 \end{cases}$$

observamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{mientras} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que el límite (2) no existe. Aunque la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, la gráfica de f no posee ninguna tangente en $(0, 0)$.

■ **Razón de cambio media** En contextos diferentes el cociente diferencial en (1) y (2), o pendiente de la recta secante, se escribe en términos de símbolos alternos. El símbolo h en (1) y (2) a menudo se escribe como Δx y la diferencia $f(a + \Delta x) - f(a)$ se denota por Δy , es decir, el cociente diferencial es

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Además, si $x_1 = a + \Delta x$, $x_0 = a$, entonces $\Delta x = x_1 - x_0$ y (3) es lo mismo que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4)$$

La pendiente $\Delta y / \Delta x$ de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se denomina **razón de cambio media de la función** f sobre el intervalo $[x_0, x_1]$. Así, el límite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$ se denomina **razón de cambio media instantánea de la función** con respecto a x en x_0 .

Casi todo mundo tiene una noción intuitiva de la velocidad como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto lapso. Cuando, por ejemplo, un autobús recorre 60 mi en 1 h, la *velocidad media* del autobús debe haber sido 60 mi/h. Por supuesto, resulta difícil mantener la razón de 60 mi/h durante todo el recorrido porque el autobús disminuye su velocidad al pasar por poblaciones y la aumenta al rebasar a otros vehículos. En otras palabras, la velocidad cambia con el tiempo. Si el programa de la compañía de transportes demanda que el autobús recorra las 60 millas de una población a otra en 1 h, el conductor sabe instintivamente que debe compensar velocidades inferiores a 60 mi/h al conducir a velocidades superiores en otros puntos del recorrido. Saber que la velocidad media es 60 mi/h no permite, sin embargo, contestar la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?

■ **Velocidad media** En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. \quad (5)$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{\text{pro}} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

Pero suponga ahora que deseamos determinar la velocidad *exacta* v en el instante en que el corredor ya lleva media hora corriendo. Si se mide que la distancia recorrida en el intervalo de 0 h a 0.5 h es igual a 5 km, entonces

$$v_{\text{pro}} = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ km/h}.$$

De nuevo, este número no es una medida, o necesariamente incluso un indicador aceptable, de la velocidad instantánea v a que el corredor se ha movido 0.5 h en la carrera. Si determi-

Atención

ojo

namos que a 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es $v_{\text{pro}} = 5.7/0.6 = 9.5$ km/h. No obstante, durante el lapso de 0.5 h a 0.6 h,

$$v_{\text{pro}} = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h.}$$

El último número es una medida más realista de la razón v . Vea la FIGURA 4.1.10. Al “estimar” el lapso entre 0.5 h y el tiempo que corresponde a la posición medida cerca de 5 km, se espera obtener incluso una mejor aproximación a la velocidad del corredor en el instante 0.5 h.

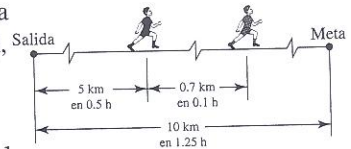


FIGURA 4.1.10 Corredor en una carrera de 10 km

Movimiento rectilíneo Para generalizar el análisis precedente, suponga que un objeto, o partícula, en el punto P se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 4.1.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde t representa el tiempo. Los valores de s son distancias dirigidas medidas a partir de O en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando P está a la derecha o arriba de O , se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O . El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto P en el instante t_0 y un punto P' en el instante t_1 , y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 4.1.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (6)$$

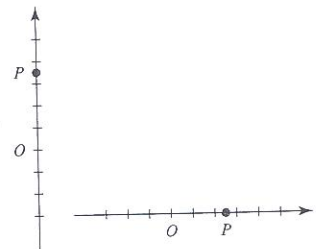


FIGURA 4.1.11 Rectas coordenadas

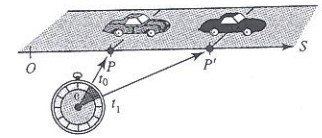


FIGURA 4.1.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura s por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde s se mide en pies y t en segundos. Vea la FIGURA 4.1.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

Solución El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación $s(t) = 630$ o $-16t^2 + 630 = 630$. Así se obtiene $t = 0$ s. Cuando la pelota golpea el suelo, entonces $s(t) = 0$ o $-16t^2 + 630 = 0$. Con la última ecuación se obtiene $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$ s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo $[0, \sqrt{315/8}]$ es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s(\sqrt{315/8}) - s(0)}{\sqrt{315/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{315/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.}$$

Si se hace $t_1 = t_0 + \Delta t$, o $\Delta t = t_1 - t_0$, y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, entonces (6) es equivalente a

$$v_{\text{pro}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (7)$$

Esto sugiere que el límite de (7) cuando $\Delta t \rightarrow 0$ proporciona la **razón de cambio instantánea** de $s(t)$ en $t = t_0$, o **velocidad instantánea**.

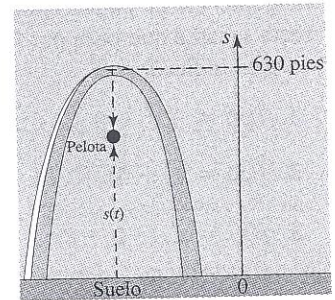


FIGURA 4.1.13 Pelota que cae en el ejemplo 8

Definición 4.1.2 Velocidad instantánea

razón de cambio instantánea

Sea $s = s(t)$ una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante $t = t_0$ es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (8)$$

siempre que el límite exista.

Nota: Excepto por notación e interpretación, no hay ninguna diferencia matemática entre (2) y (8). También, a menudo se omite la palabra *instantánea*, de modo que entonces se habla de la *razón de cambio* de una función o la *velocidad* de una partícula en movimiento.

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 8

Encuentre la velocidad instantánea de la pelota que cae en el ejemplo 8 en $t = 3$ s.

Solución Se usa el mismo procedimiento de cuatro pasos que en los ejemplos anteriores con $s = s(t)$ dada en el ejemplo 8.

$$i) s(3) = -16(9) + 630 = 486. \text{ Para cualquier } \Delta t \neq 0,$$

$$s(3 + \Delta t) = -16(3 + \Delta t)^2 + 630 = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486.$$

$$ii) s(3 + \Delta t) - s(3) = [-16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486] - 486 \\ = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t = \Delta t(-16\Delta t - 96)$$

$$iii) \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-16\Delta t - 96)}{\Delta t} = -16\Delta t - 96$$

$$iv) \text{ Por (8),}$$

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-16\Delta t - 96) = -96 \text{ pies/s.}$$

(9) ■

En el ejemplo 9, el número $s(3) = 486$ pies es la altura de la pelota por arriba del nivel del suelo a 3 s de haber sido soltada. El signo menos en (9) es importante porque la pelota se está moviendo en dirección opuesta a la dirección positiva (hacia arriba), es decir, se mueve hacia abajo.

4.1**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de x .

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$

2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$

3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$

4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$

5. $f(x) = \sin x$, $(\pi/2, 1)$; $x = \pi/2$, $x = 2\pi/3$

6. $f(x) = \cos x$, $(-\pi/3, \frac{1}{2})$; $x = -\pi/2$, $x = -\pi/3$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7. $f(x) = x^2 - 6$, $x = 3$

8. $f(x) = -3x^2 + 10$, $x = -1$

9. $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 1$

10. $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $x = -2$

11. $f(x) = -2x^3 + x$, $x = 2$

12. $f(x) = 8x^3 - 4$, $x = \frac{1}{2}$

13. $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x = -1$

14. $f(x) = \frac{4}{x-1}$, $x = 2$

15. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $x = 0$

16. $f(x) = 4 - \frac{8}{x}$, $x = -1$

17. $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$

18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$

En los problemas 19 y 20, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor

dado de x . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente. Antes de empezar, revise los límites en (10) y (14) de la sección 3.4, así como las fórmulas de suma (17) y (18) en la sección 2.4.

19. $f(x) = \sin x$, $x = \pi/6$

20. $f(x) = \cos x$, $x = \pi/4$

En los problemas 21 y 22, determine si la recta que pasa por los puntos sobre la parábola es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto dado.

21.

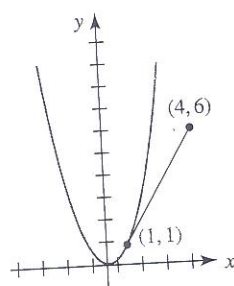


FIGURA 4.1.14 Gráfica para el problema 21

22.

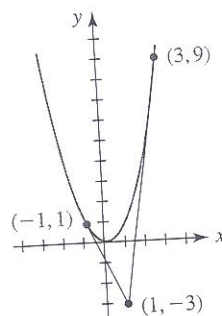


FIGURA 4.1.15 Gráfica para el problema 22

23. En la FIGURA 4.1.16, la recta mostrada es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre una ecuación de la recta tangente. ¿Cuál es la intersección y de la recta tangente?

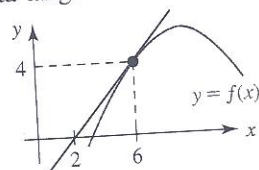


FIGURA 4.1.16 Gráfica para el problema 23

24. En la FIGURA 4.1.17, la recta mostrada es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto indicado. Encuentre $f(-5)$.

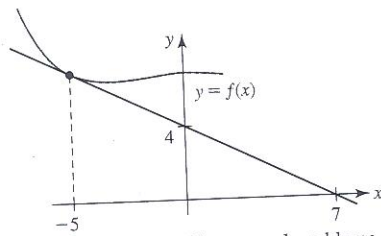


FIGURA 4.1.17 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-28, use (2) para encontrar una fórmula para m_{tan} en un punto general $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f . Use la fórmula m_{tan} para determinar los puntos en que la recta tangente a la gráfica es horizontal.

25. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ 26. $f(x) = 2x^2 + 24x - 22$
 27. $f(x) = x^3 - 3x$ 28. $f(x) = -x^3 + x^2$

≡ Aplicaciones

29. Un automóvil recorre 290 mi entre Los Ángeles y Las Vegas en 5 h. ¿Cuál es la velocidad media?
 30. Dos señalizaciones sobre una carretera recta están a una distancia de $\frac{1}{2}$ mi entre sí. Una patrulla observa que un automóvil cubre la distancia entre las marcas en 40 s. Suponiendo que la velocidad límite es 60 mi/h, ¿el automóvil será detenido por exceso de velocidad?
 31. Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer los 3 500 km que hay entre Hawaii y San Francisco. ¿En cuántas horas realiza este vuelo?
 32. Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 26 mi. La carrera empieza a mediodía. A la 1:30 p.m., un corredor cruza la marca de 10 mi y a las 3:10 p.m. el corredor pasa por la marca de 20 mi. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 p.m. y las 3:10 p.m.?

En los problemas 33 y 34, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas está dada por la función. Use (8) para encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el instante indicado.

33. $s(t) = -4t^2 + 10t + 6$, $t = 3$ 34. $s(t) = t^2 + \frac{1}{5t+1}$, $t = 0$

35. La altura por arriba del suelo a que se suelta una pelota a una altura inicial de 122.5 m está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 122.5$, donde s se mide en metros y t en segundos.

- a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = \frac{1}{2}$?
 b) ¿En qué instante la pelota golpea el suelo?
 c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

36. Al ignorar la resistencia del aire, si un objeto se deja caer desde una altura inicial h , entonces su altura por arriba del nivel del suelo en el instante $t > 0$ está dada por $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$, donde g es la aceleración de la gravedad.

- a) ¿En qué instante el objeto choca contra el suelo?
 b) Si $h = 100$ pies, compare los instantes de impacto para la Tierra ($g = 32$ pies/s²), Marte ($g = 12$ pies/s²) y la Luna ($g = 5.5$ pies/s²).
 c) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t .
 d) Use los instantes encontrados en el inciso b) y la fórmula encontrada en el inciso c) para calcular las

velocidades de impacto correspondientes para la Tierra, Marte y la Luna.

37. La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por $s = -16t^2 + 256t$, donde s se mide en pies y t en segundos.

- a) Determine la altura del proyectil en $t = 2$, $t = 6$, $t = 9$ y $t = 10$.
 b) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?
 c) Demuestre que la velocidad media entre $t = 7$ y $t = 9$ es cero. Interprete físicamente.
 d) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?
 e) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea v en el instante general t .
 f) Use el resultado del inciso d) y la fórmula encontrada en el inciso e) para aproximar la velocidad de impacto final.
 g) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

38. Suponga que la gráfica mostrada en la FIGURA 4.1.18 es la de la función de posición $s = s(t)$ de una partícula que se mueve en una línea recta, donde s se mide en metros y t en segundos.

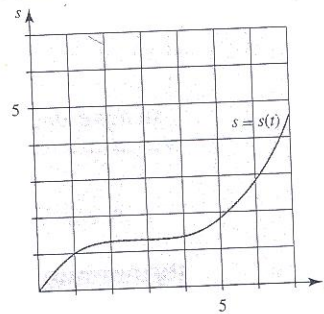


FIGURA 4.1.18 Gráfica para el problema 38

- a) Calcule la posición de la partícula en $t = 4$ y $t = 6$.
 b) Calcule la velocidad media de la partícula entre $t = 4$ y $t = 6$.
 c) Calcule la velocidad inicial de la partícula; es decir, su velocidad en $t = 0$.
 d) Calcule el instante en que la velocidad de la partícula es cero.
 e) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es decreciente.
 f) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es creciente.

≡ Piense en ello

39. Sea $y = f(x)$ una función par cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, f(a))$ es $-m$. [Sugerencia: Explique por qué $f(-a + h) = f(a - h)$.]
 40. Sea $y = f(x)$ una función impar cuya gráfica tiene una recta tangente m con pendiente $(a, f(a))$. Demuestre que la pendiente de la recta tangente en $(-a, -f(a))$ es m .
 41. Proceda como en el ejemplo 7 y demuestre que no hay recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + |x|$ en $(0, 0)$.